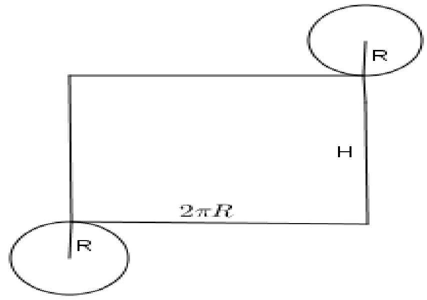
Opción A

Ejercicio 1.- [2’5 puntos] Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata.
Siendo **R** el radio de las tapas y **H** la altura y sabiendo que 1 litro es 1 dm^3
El bote de conservas en donde se utiliza la menor cantidad de material es el que tiene superficie mínima



$$\begin{cases} 1 = \pi R^2 . H \Rightarrow H = \dfrac{1}{\pi R^2} \\ S = 2\pi R H + 2\pi R^2 \end{cases} \Rightarrow S = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \frac{2}{R} + 2\pi R^2 \Rightarrow S'(R) = \frac{dS}{dR} = -\frac{2}{R^2} + 4\pi R$$

$$S'(R) = \frac{4\pi R^3 - 2}{R^2} \Rightarrow S'(R) = 0 \Rightarrow \frac{4\pi R^3 - 2}{R^2} = 0 \Rightarrow 4\pi R^3 - 2 = 0 \Rightarrow 4\pi R^3 = 2 \Rightarrow R^3 = \frac{2}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = \frac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{2\pi} \Rightarrow S''(R) = \frac{d^2S}{dR^2} = -2\frac{-2R}{R^4} + 4\pi = \frac{4}{R^3} + 4\pi = 4 \cdot \frac{1 + \pi R^3}{R^3}$$

$$S''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = 4 \cdot \frac{1 + \pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^3}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^3} = 4 \cdot \frac{1 + \frac{\pi}{2\pi}}{\frac{1}{2\pi}} = 4 \cdot \frac{\frac{2\pi + \pi}{2\pi}}{\frac{1}{2\pi}} = 4 \cdot 3\pi = 12\pi > 0 \Rightarrow Mínimo$$

$$\begin{cases} R = \dfrac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{2\pi}\ dm \\ H = \dfrac{1}{\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{\pi} = \dfrac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}\ dm \end{cases}$$

Ejercicio 2.- [2’5 puntos] Calcula $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1 + \sqrt{2x+1}}\, dx$ (sugerencia: $t = \sqrt{2x+1}$).

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1 + \sqrt{2x+1}}\, dx = \int \frac{t}{t^2 + t} \cdot t\, dt = \int \frac{t^2}{(t+1)\, t}\, dt = \int \frac{tdt}{t+1} = \int \frac{(t+1)dt}{t+1} + \int \frac{(-1)dt}{t+1} = \int dt - \int \frac{dt}{t+1} =$$

$2x + 1 = t^2 \Rightarrow 2dx = 2tdt \Rightarrow dx=tdt$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{t+1} = t - \ln(t+1) + K = \{\text{Quito cambio}\} = \sqrt{2x+1} - \ln\left(\sqrt{2x+1} + 1\right) + K$$

Ejercicio 3.- Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$ Determina, si existen, los valores de k en cada uno de los casos siguientes:

a) [0’75 puntos] **rango(A) = 1**.
b) [0’75 puntos] **A^2 = A**.
c) [0’5 puntos] **A tiene inversa**.
d) [0’5 puntos] **det (A) = −2**.

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix}=-\left[(1+k)\cdot(1-k)\right]\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -\left[(1+k)\cdot(1-k)\right]=0\Rightarrow (1+k)\cdot(1-k)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1+k=0\Rightarrow k=-1 \\ 1-k=0\Rightarrow k=1 \end{cases}\Rightarrow Si \begin{cases} k=-1 \\ k=1 \end{cases}\Rightarrow |A|=0\Rightarrow rang\ (A)=1$$

$b)$

$$A^2=\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k^2+(1+k)\cdot(1-k) & k\,(1+k) \\ k\,(1-k) & (1-k)\cdot(1+k) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k^2+1-k^2 & k\,(1+k) \\ k\,(1-k) & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A=\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \\ A^2=\begin{pmatrix} 1 & k\,(1+k) \\ k\,(1-k) & 1-k^2 \end{pmatrix} \end{cases}\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k\,(1+k) \\ k\,(1-k) & 1-k^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} k=1 \\ k\,(1+k)=(1+k)\Rightarrow k=1 \\ k\,(1-k)=(1-k)\Rightarrow k=1 \\ 1-k^2=0\Rightarrow (1+k)\cdot(1-k)=0\Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ k=1 \end{cases} \end{cases}\Rightarrow k=1$$

c) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix}=-\left[(1+k)\cdot(1-k)\right]\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -\left[(1+k)\cdot(1-k)\right]=0\Rightarrow (1+k)\cdot(1-k)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1+k=0\Rightarrow k=-1 \\ 1-k=0\Rightarrow k=1 \end{cases}\Rightarrow \forall k\in \Re-\{-1,1\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$c)$

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix}=-\left[(1+k)\cdot(1-k)\right]\Rightarrow Si\ |A|=-2\Rightarrow \left[(1+k)\cdot(1-k)\right]=2\Rightarrow \left(1-k^2\right)=2$$

$k^2-1=-2\Rightarrow k^2=-1\Rightarrow k=\pm\sqrt{-1}$, que no tiene soluciones reales

Ejercicio 4.- [2'5 puntos] Determina el punto de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+1 = \dfrac{z}{3}$ que equidista de los planos $\pi \equiv x+y+z+3=0 \quad y \quad \pi' \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu \end{cases}$

La distancia del punto **R** genérico de la recta **r** (puesta en paramétricas) a los planos es la misma
Para hallar la ecuación del plano π' consideramos los vectores que lo forman y el vector PG, siendo P cualquier punto del plano (tomamos el indicado en su ecuación) y G el punto genérico del plano; estos tres vectores son coplanarios y el volumen del paralelepípedo (el producto mixto de los tres) que determinan es nulo y la ecuación pedida del plano

$a)$

$$Siendo\ P(-3,0,-6) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (1,-1,0) \\ \overrightarrow{v_2} = (0,1,-1) \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z)-(-3,0,-6) = (x+3,y,z+6) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+3)+(z+6)+y=0 \Rightarrow \pi' \equiv x+y+z+9=0$$

$$r \equiv \begin{cases} x=1+2\beta \\ y=-1+\beta \\ z=3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(R,\pi) = \dfrac{(1+2\beta)+(-1+\beta)+3\beta+3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1+2\beta-1+\beta+3\beta+3}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\beta+3}{\sqrt{3}} \\ d(R,\pi') = \dfrac{(1+2\beta)+(-1+\beta)+3\beta+9}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1+2\beta-1+\beta+3\beta+9}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\mu+9}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$d(R,\pi) = \pm d(R,\pi') \Rightarrow \frac{6\beta+3}{\sqrt{3}} = \pm\left(\frac{6\beta+3}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6\beta+3}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\beta+3}{\sqrt{3}} \Rightarrow 6\beta+3 = 6\beta+9 \Rightarrow 0=6 \Rightarrow Sin\ solución \\ \dfrac{6\beta+3}{\sqrt{3}} = -\dfrac{6\beta+9}{\sqrt{3}} \Rightarrow 6\beta+3 = -(6\beta+9) \Rightarrow \end{cases}$$

$$6\beta+3 = -6\beta-9 \Rightarrow 12\beta = -12 \Rightarrow \beta = \frac{-12}{12} = -1 \Rightarrow R \begin{cases} x=1+2\cdot(-1) \\ y=-1+(-1) \\ z=3\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow R(-1,-2,-3)$$

Los planos son paralelos por eso hay un solo punto **R** de solución

Opción B

Ejercicio 1.- Sea $f:\Re \to \Re$ la función definida por $f(x)=\left|x^2-4\right|$

a) [1’5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de **f** y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de **f** en el punto de abscisa x = −1.

$$x^2-4>0 \Rightarrow (x+2)(x-2)>0 \Rightarrow \begin{cases} x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{cases}$$

	$-\infty$ -2	-2 2	2 ∞
x > - 2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x<-2 \\ -\left(x^2-4\right) & si \quad -2\le x\le 2 \\ x^2-4 & si \quad x>2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<-2 \\ -2x & si \quad -2<x<2 \\ 2x & si \quad x>2 \end{cases} \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0$$

$$Tramo\,1 \Rightarrow x<-2 \Rightarrow (-\infty\,,\,2) \Rightarrow 2x>0 \Rightarrow \begin{cases} 2>0 \Rightarrow \forall x\in \Re \\ x>0 \end{cases}$$

	$-\infty$ -2
2 > 0	**(+)**
x > 0	**(-)**
Solución	**(-)**

Decrecimiento $\forall x\in \Re \,/\, x<-2$

$$Tramo\,2 \Rightarrow -2<x<2 \Rightarrow x\in(-2\,,\,2) \Rightarrow -2x>0 \Rightarrow \begin{cases} -2<0 \Rightarrow \forall x\in \Re \\ x>0 \end{cases}$$

	-2 0	0 2
2 > 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in \Re /-2<x<0$ Dec**recimiento** $\forall x\in \Re \,/\, 0<x<2$

$$Tramo\,3 \Rightarrow x<2 \Rightarrow (2\,,\,\infty) \Rightarrow 2x>0 \Rightarrow \begin{cases} 2>0 \Rightarrow \forall x\in \Re \\ x>0 \end{cases}$$

	2 ∞
2 > 0	**(+)**
x > 0	**(+)**
Solución	**(+)**

Crecimiento $\forall x\in \Re \,/\, x<-2$

Máximo relativo $x=-2 \Rightarrow f(-2)=-2\cdot(-2)=4$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción B

b)

Tan*gente*

$$f'(x) = -2x \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = 4-(-1)^2 = 4-1 = 3 \\ f'(-1) = -2\cdot(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow y-3 = 2\cdot(x+1) \Rightarrow y-3 = 2x+2 \Rightarrow y = 2x+5$$

$2x - y + 5 = 0$

Normal

$$\begin{cases} f(-1) = 4-(-1)^2 = 4-1 = 3 \\ m = -\dfrac{1}{f'(-1)} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y-3 = -\frac{1}{2}\cdot(x+1) \Rightarrow -2y+6 = x+1 \Rightarrow -2y = x-5 \Rightarrow x+2y-5 = 0$$

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Determina la función $f:\Re \rightarrow \Re$ tal que $f''(x) = -2\ sen\ 2x$, **f(0) = 1** y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int -2\ sen\ 2x\ dx = -2\int sen\ t\ \frac{dt}{2} = -\int sen\ t\ dt = -(-\cos t) = \cos t = \cos 2x + K$$

$$2x = t \Rightarrow 2\ dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (\cos 2x + K)\,dx = \int (\cos t + K)\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \cos t\ dt + \frac{1}{2}\int K\ dt = \frac{sen\ t}{2} + Kt$$

$$f(x) = \frac{sen\ 2x}{2} + K2x + C \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow \dfrac{sen\ 2\cdot 0}{2} + 2K\cdot 0 + C = 1 \Rightarrow \dfrac{sen\ 0}{2} + 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1 \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{sen\ 2\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{2} + 2K\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{sen\ \pi}{2} + K\pi + 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{0}{2} + K\pi + 1 = 0 \Rightarrow K = -\dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{sen\ 2x}{2} - \frac{2}{\pi}x + 1$$

Ejercicio 3.- Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&\lambda+1\\ \lambda&1&-1\\ 0&0&1\end{pmatrix}$

a) [1'5 puntos] Determina, si existen, los valores de λ para los que $\mathbf{A^{-1} = 2I - A}$ (siendo I la matriz identidad de orden 3).
b) [1 punto] Determina, si existen, los valores de λ para los que la matriz $A + A^T$ no tiene inversa (A^T es la matriz traspuesta de A)

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&\lambda+1\\ \lambda&1&-1\\ 0&0&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&0\\ \lambda&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \forall\lambda\in\Re\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^T\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&\lambda&0\\ 0&1&0\\ \lambda+1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^T=\begin{pmatrix}1&0&-(\lambda+1)\\ -\lambda&1&-[-1-\lambda(\lambda+1)]\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&0&-(\lambda+1)\\ -\lambda&1&\lambda^2+\lambda+1\\ 0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-(\lambda+1)\\ -\lambda&1&\lambda^2+\lambda+1\\ 0&0&1\end{pmatrix}\\ 2\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&\lambda+1\\ \lambda&1&-1\\ 0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\ 0&2&0\\ 0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&\lambda+1\\ \lambda&1&-1\\ 0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\lambda+1\\ -\lambda&1&1\\ 0&0&1\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-(\lambda+1)\\ -\lambda&1&\lambda^2+\lambda+1\\ 0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\lambda+1\\ -\lambda&1&1\\ 0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda^2+\lambda+1=1\Rightarrow\lambda^2+\lambda=0\Rightarrow$$

$$(\lambda+1)\lambda=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=-1\\ \lambda=0\end{cases}$$

b)
Determina, si existen, los valores de λ para los que la matriz $A + A^T$ no tiene inversa (A^T es la matriz traspuesta de A)
$A+A^T$ no tiene inversa si $\det(A+A^T) = 0$

$$A+A^T=\begin{pmatrix}1&0&\lambda+1\\ \lambda&1&-1\\ 0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&\lambda&0\\ 0&1&0\\ \lambda+1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\lambda&\lambda+1\\ \lambda&2&-1\\ \lambda+1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\det(A+A^T)=\begin{vmatrix}2&\lambda&\lambda+1\\ \lambda&2&-1\\ \lambda+1&-1&2\end{vmatrix}_{F_3+2F_2}=\begin{vmatrix}2&\lambda&\lambda+1\\ \lambda&2&-1\\ 3\lambda+1&3&0\end{vmatrix}\ \begin{matrix}Adjuntos\\ Tercera\\ Fila\end{matrix}=(3\lambda+1)(-\lambda-2\lambda-2)-3(-2-\lambda^2-\lambda)=$$

$= -9\lambda^2 - 9\lambda - 2 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 6 = -6\lambda^2 - 6\lambda + 4.$

$\det(A+AT) = 0 \to -6\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \to 6\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0 \to \lambda=\frac{-6\pm\sqrt{36+24}}{12}=\frac{-6}{12}\pm\frac{\sqrt{60}}{12}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{6}$.

Luego si $\lambda=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{6}$, $\det(A+AT) = 0$.

Ejercicio 4.- Considera el plano π de ecuación **6x − my + 2z = 1** y la recta **r** dada por $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-1}$

a) [1 punto] Calcula **m** en el caso en que la recta **r** es perpendicular al plano π.
b) [1'5 puntos] ¿Existe algún valor de **m** para el que la recta **r** esté contenida en el plano π?

a) El vector director de la recta **r** tiene que ser igual o proporcional al vector director del plano π

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=(6\,,-m\,,2) \\ \overrightarrow{v_r}=(-3\,,2\,,-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{-3}=\frac{2}{-1}=\frac{-m}{2}\Rightarrow m=4$$

a) El vector director de la recta **r** tiene que ser perpendicular al vector director del plano π y, por ello, el producto escalar de ambos es nulo.
Después estudiaremos si un punto R cualquiera de la recta r (tomaremos el punto determinado en su ecuación) pertenece al plano π
Dándose las dos condiciones la recta está contenida en el plano π

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=(6\,,-m\,,2) \\ \overrightarrow{v_r}=(-3\,,2\,,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{v_r}\Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\Rightarrow (6\,,-m\,,2)\cdot(-3\,,2\,,-1)=0\Rightarrow -18-2m-2=0\Rightarrow$$

$$-20-2m=0\Rightarrow 2m=-20\Rightarrow m=-10\Rightarrow \pi\equiv 6x-(-10)y+2z=1\Rightarrow \pi\equiv 6x+10y+2z=1$$

$$Sea\begin{cases} R(1\,,-1\,,-2) \\ \pi\equiv 6x+10y+2z=1 \end{cases}\Rightarrow 6\cdot 1+(10)\cdot(-1)+2\cdot(-2)=1\Rightarrow 6-10-4\neq 1\Rightarrow No\ \ pertenece\ al\ \ plano$$